



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, București, 8 februarie 2025

CLASA a VIII-a - Soluții și barem

Problema 1

- a) Demonstrați că $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$, pentru orice $a, b > 0$.
- b) Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel încât $a + b + c = 2025$. Arătați că $\frac{a}{a+675} + \frac{b}{b+675} + \frac{c}{c+675} \leq \frac{3}{2}$.

autor: Livia Harabagiu

Soluție:

a) $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4} \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2 \dots\dots\dots 2p$

b) $\frac{a}{a+675} + \frac{b}{b+675} + \frac{c}{c+675} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a \cdot 675}{a+675} + \frac{b \cdot 675}{b+675} + \frac{c \cdot 675}{c+675} \leq \frac{2025}{2}$.

Din a) rezultă $\frac{a \cdot 675}{a+675} \leq \frac{a+675}{4}$ și analogele $\dots\dots\dots 3p$.

Sumând cele trei relații, obținem

$$\frac{a \cdot 675}{a+675} + \frac{b \cdot 675}{b+675} + \frac{c \cdot 675}{c+675} \leq \frac{a+b+c+675 \cdot 3}{4} = \frac{2025}{2} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 2 Fie $ABCD$ un tetraedru cu baza BCD triunghi echilateral, iar G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD , respectiv ACD .

- a) Arătați că $G_1G_2 \parallel (BCD)$.
- b) Considerăm o dreaptă PQ , $P \in (CD)$ și $Q \in (BC)$ ce conține centrul bazei. Arătați că $AC \parallel (G_1PQ)$.

suplimentul Gazetei Matematice

Soluție:

- a) Notăm cu M și N mijloacele muchiilor BD , respectiv CD . Atunci, în triunghiul $\triangle AMN$, $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3}$, de unde obținem, folosind reciproca teoremei lui Thales, că $G_1G_2 \parallel MN$. Dar $MN \subset (BCD)$, deci $G_1G_2 \parallel (BCD) \dots\dots\dots 4p$

b) Fie O centrul triunghiului echilateral $\triangle BCD$. Atunci $O \in CM$ și $\frac{OC}{CM} = \frac{2}{3} = \frac{AG_1}{AM}$.

Putem astfel aplica reciproca teoremei lui Thales în triunghiul $\triangle AMC$, obținând $OG_1 \parallel AC$ **2p**

$O \in PQ \Rightarrow O \in (G_1PQ)$, deci $OG_1 \subset (G_1PQ)$. Cum $AC \parallel OG_1$, obținem $AC \parallel (G_1PQ)$ **1p**

Problema 3 Aflați numerele prime p și q cu proprietatea că numărul $p^2 + 11pq + 25q^2$ este pătrat perfect.

autor: Mihaela Berindeanu

Soluție:

Fie $p^2 + 11pq + 25q^2 = n^2, n \in \mathbb{N}$. Atunci $(p + 5q)^2 + pq = n^2$, deci $pq = (n + p + 5q)(n - p - 5q)$ **2p**

Cum $n + p + 5q > p$ și $n + p + 5q > q$, iar p, q prime, rezultă $n + p + 5q = pq$ și $n - p - 5q = 1 \Rightarrow pq - 2p - 10q - 1 = 0 \Rightarrow (p - 10)(q - 2) = 21$ **3p**

Analizând cele 4 cazuri posibile, obținem soluțiile $(p, q) \in \{(11, 23); (17, 5); (31, 3)\} \dots$ **2p**

Problema 4 Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic astfel încât măsurile unghiurilor $\sphericalangle B'AC, \sphericalangle CAD', \sphericalangle B'AD'$ sunt toate mai mari sau egale cu 60° . Arătați că paralelipipedul este cub.

autor: Traian Preda

Soluție: $\triangle AB'C \equiv \triangle CD'A \equiv \triangle B'AD' (L.L.L.) \Rightarrow \sphericalangle AB'C = \sphericalangle B'AD'$ și $\sphericalangle ACB' = \sphericalangle CAD'$ **3p**

În triunghiul $\triangle AB'C$, avem $\sphericalangle B'AC + \sphericalangle AB'C + \sphericalangle ACB' = 180^\circ$, deci $\sphericalangle B'AC + \sphericalangle B'AD' + \sphericalangle CAD' = 180^\circ$. Cum $\sphericalangle B'AC, \sphericalangle B'AD', \sphericalangle CAD' \geq 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle B'AC = \sphericalangle AB'C = \sphericalangle ACB' = 60^\circ$, deci $\triangle AB'C$ echilateral **2p**

Notând dimensiunile paralelipipedului cu $AB = a, BC = b$ și $AA' = c$, din $AB' = B'C = AC$ obținem $a^2 + c^2 = b^2 + c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow a = b = c$, așadar paralelipipedul este cub **2p**